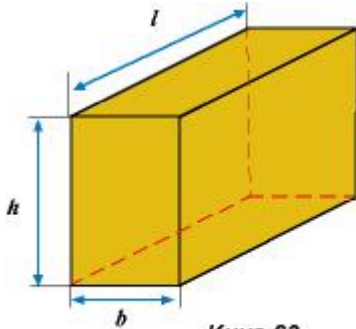


Kappaleiden tilavuus

Suorakulmainensärmiö.



Kuva 63
Suorakulmainen
särmistö.

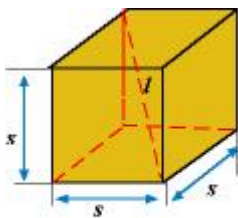
Tilavuus (volyymi) $V =$ pohjan ala kertaa korkeus.
Tankomaisista kappaleista puhuttaessa nimitetään korkeutta tangon pituudeksi.

$$\text{Pohjan ala } A = b \times h$$

$$\text{Korkeus (pituus)} = l$$

$$\text{Tilavuus: } \underline{V = b \times h \times l}$$

Kuutio



Kuva 63b
Kuutio.

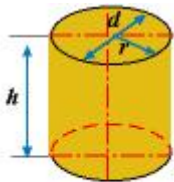
on suorakulmainen särmiö, jonka kaikki särmät ovat yhtäpitkät. Jos särmän pituutta merkitään s :llä, on kuution tilavuus

$$\underline{V = s^3}$$

Kuution lävistäjän pituus

$$\underline{l = s \times \sqrt{3} = 1,732 s}$$

Sylinteri eli lieriö.



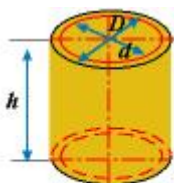
Kuva 64
Sylinteri eli lieriö.

Tilavuus = pohjan ala x korkeus.

$$\text{Korkeus} = h$$

$$\text{Pohjan ala } \underline{A = \pi \times r^2 = p \times d^2 / 4 \times h.}$$

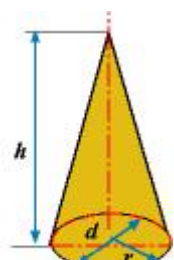
Ontto sylinteri ja putki.



Kuva 65
Ontto sylinteri.

Tilavuus $V =$ pohjan ala kertaa korkeus

$$\underline{(\pi \times D^2 / 4 - \pi \times d^2 / 4) \times h.}$$

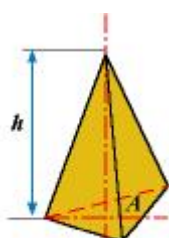


Kuva 66
Kartio.

Kartio.

Tilavuus $V = 1/3$ pohjan pinta-alasta $\pi \times d^2 / 4$ kertaa korkeus h .

$$\underline{V = 1/3 \times p \times d^2 / 4 \times h.}$$



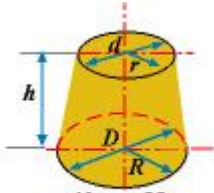
Kuva 67
Särmäkartio.

Särmäkartio.

Tilavuus $V = 1/3$ pohjan pinta-alasta kertaa korkeus h .

$$\underline{V = 1/3 \times A \times h.}$$

Katkaistu kartio.



Kuva 68
Katkaistu kartio.

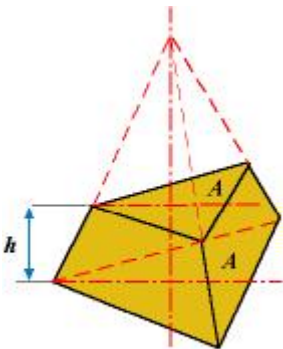
Tilavuus lasketaan kaavasta:

$$V = \pi \times h / 3 \times (R^2 + R \times r + r^2).$$

Tai kaavasta:

$$V = \pi \times h / 12 \times (D^2 + D \times d + d^2).$$

Katkaistu särmäkartio.

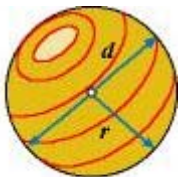


Kuva 69
Katkaistu särmäkartio.

Jos katkaistun särmäkartion pohjien alat ovat A ja A_1 sekä korkeus h , sen tilavuus lasketaan kaavasta:

$$V = \frac{h}{3} \times (A + \sqrt{A \times A_1} + A_1)$$

Pallo.



Kuva 70
Paallo.

Pallon tilavuus saadaan kaavasta:

$$V = \frac{4}{3} \pi \times r^3 = \frac{\pi \times d^3}{6}$$

Pallosektori.

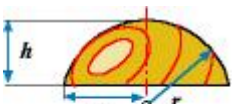


Kuva 71
Paallosektori.

Jos pallosektorin kalotin korkeus = h ja pallon säde = r , saadaan pallosektorin tilavuus kaavasta:

$$V = \frac{2}{3} \times \pi \times r^2 \times h \approx 2,0944 r^2 \times h$$

Pallosegmentti.

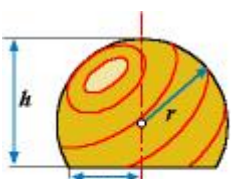


Kuva 72
Pallosegmentti.

Jos pallosegmentin korkeus = h , pohjan säde = a ja pallon säde = r ,

$$V = \frac{\pi \times h}{6} \times (3 a^2 + h^2)$$

saadaan sen tilavuus kaavasta:

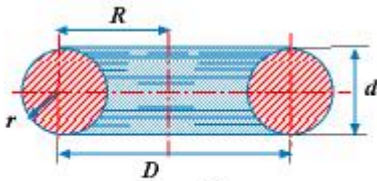


Kuva 73
Pallosegmentti.

tai kaavasta:

$$V = \frac{\pi \times h^2}{3} (3 r - h)$$

Pyöreä rengas.



Kuva 74
Pyöreä rengas.

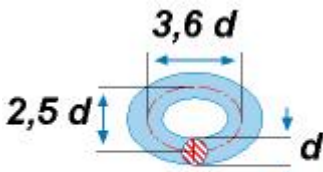
tilavuus saadaan kaavasta:

$$V = 2 \times \pi^2 \times R \times r^2 \approx 19,739 R \times r^2$$

tai kaavasta:

$$V = 1/4 \times \pi^2 \times D \times d^2 \approx 2,4674 D \times d^2$$

Ketjun rengas.



Kuva 75
Lyhythahloisen
ketjun rengas.

Renkaan tilavuus $V =$ viivoitetun ympyräpinnan ala $A \times$ renkaan ellipsin muotoisen keskiviivan pituus l .

$$A = \frac{\pi \times d^2}{4} \text{ ja } l = 9,6597 d$$

(kun tässä tapauksessa ellipsin isomman ja pienemmän halkaisijan suhde = 1,44).

$$V = \frac{\pi \times d^2}{4} \times 9,6597 d \approx 7,587 d^3$$

Kappaleiden paino

Kysyttäessä, paljonko jokin esine painaa, halutaan tietää joko sen ainemäärä m , kun esimerkiksi jotakin metallia, elintarvikkeita ym. ostetaan tietty määrä, tai sen paino G , kun on otettava huomioon mm. lujuusopilliset näkökohdat, esim. nosturin koukkuun ripustetun kappaleen aiheuttama rasitus, kuljetusvälineen kuormitus ym. Kappaleen ainemäärä eli massa m suuruus määrätään tavallisesti punnitsemalla. Jos se olisi määrättävä laskemalla, täytyisi tietää kappaleen tiheys q ja tilavuus V , jolloin

$$m = q \times V$$

Massan m mittayksikkö on g, kg tai t, kun q :n mittayksikkö on vastaavasti g/cm³, kg/dm³ tai t/m³ ja V :n mittayksikkö cm³, dm³ tai m³.

Kappaleen paino $G =$ sen ominaispaino $\gamma \times$ tilavuus V eli

$$G = \gamma \times V$$

Joka saadaan kaavasta. Kaavan suureiden vastaavat mittayksiköt käyvät selville seuraavasta taulukosta:

G:n mittayksikkö on:	kun γ :n mittayksikkö on:	ja V :n mittayksikkö:
voimagramma gf eli pondi p	gf / cm ³ eli p / cm ³	cm ³
voimakilogramma kgf kilopondi kp	kgf / dm ³ eli kp / dm ³	dm ³
voimatonna tf eli megpondi Mp	tf / m ³ eli Mp / m ³	m ³

Kappaleen painon G ja massan m lukuarvo eli mittaluku on meillä käytännöllisesti katsoen sama. Mutta koska massa ja paino ovat kaksi eri käsitettä (massalla käsitetään ainemäärää ja painolla voimaa), on niille annettu kummallekin oma mittayksikkönsä. Esim. gramma ja voimagramma eli pondi jne.

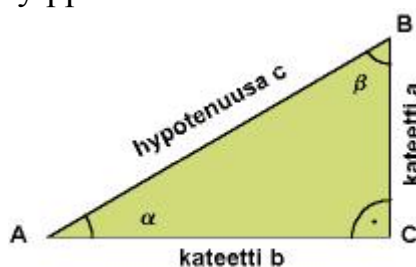
Metallien ja muutamien muiden aineiden tiheyden q ja ominaispainon g lukuarvot (mittaluvut) saadaan aiemmin esitetystä taulukosta.

Trigonometriaa

Trigonometria, joka on mittaustieteen erillinen osa, käsittelee kolmion sivujen ja kulmien käsitteitä, joiden tunteminen tekee mahdolliseksi suorakulmaisten kolmioiden sivujen ja kulmien suuruuden määräämisen.

Kolmion kulmat. teräväksi sanotaan kulmaa, jos se on pienempi kuin suora kulma, ja tylppäksi, jos se on suurempi kuin suora kulma mutta pienempi kuin oikokulma.

Kolmiota, jonka kaikki kulmat ovat teräviä, sanotaan teräväkulmaiseksi. Suorakulmaisessa kolmiossa on yksi kulma suora ja tylppäkulmaisessa kolmiossa yksi kulma tylppä.

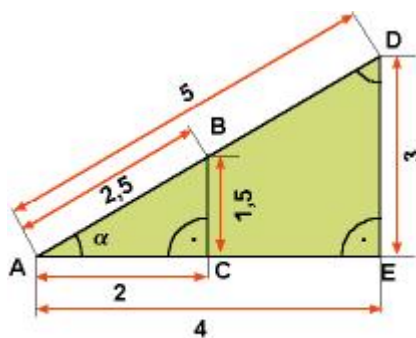


Kuva 76.

Koska kolmion kulmien summa = 180° , on suorakulmaisessa kolmiossa suora kulman lisäksi kaksi terävää kulmaa. Kuvassa 76 kulmat α ja β ovat siis teräviä ja niiden summa $\alpha + \beta = 90^\circ$. Kahta kulmaa, joiden summa = suora kulma, sanotaan **komplementtikulmiksi**.

Monikulmioiden yhdenmuotoisuus.

Kaksi monikulmiota, joiden peräkkäiset kulmat ovat vastaavasti yhtäsuuret ja niiden vastinsivujen suhde on sama, ovat yhdenmuotoiset.



Kuva 77.

Nimenomaan kolmioiden yhdenmuotoisuudesta on olemassa useitakin väittämiä. Erään mukaan tulee vain kaksi paria kulmia olla vastaavasti yhtäsuuria, jotta kolmiot olisivat yhdenmuotoiset. Sellaisia ovat siis kolmiot ABC ja ADE kuvassa 77, koska ne kumpikin ovat suorakulmaisia ja kulma α on niillä yhteinen. Yhdenmuotoisten monikulmioiden vastinsivujen suhde on sama vakioluku. Kolmiossa ABC ja ADE ovat vastinsivuja AB ja AD, BC ja DE sekä AC ja AE.

Niiden pituuksista käy selville, että vastinsivujen suhde on $2,5 : 5 = 1,5 : 3 = 2 : 4 = \frac{1}{2}$.

Suorakulmaisen kolmion terävien kulmien suuruus riippuu kolmioiden sivujen suhteesta. Näitä sivujen suhteita nimitetään trigonometriassa seuraavasti:

Terävän kulman sini =	$\frac{\text{kulman vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$
terävän kulman kosini =	$\frac{\text{kulman viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$
terävän kulman tangenti =	$\frac{\text{kulman vastainen kateetti}}{\text{kulman viereinen kateetti}}$
terävän kulman kotangenti =	$\frac{\text{kulman viereinen kateetti}}{\text{kulman vastainen kateetti}}$

eli kuva 76 kirjaimin lausuttuna:

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha = \frac{a}{c} & \sin \beta = \frac{b}{c} \\ \cos \alpha = \frac{b}{c} & \cos \beta = \frac{a}{c} \\ \text{tg } \alpha = \frac{a}{b} & \text{tg } \beta = \frac{b}{a} \\ \text{cot } \alpha = \frac{b}{a} & \text{cot } \beta = \frac{a}{b} \end{array}$$

Sinin lyhennysmerkki on sin, kosinin cos, tangentin tg ja kotangentin cot. Sin α lausutaan sini alfa, cos α kosini alfa, tg β tangenti beeta, cot β kotangenti beeta jne.

Nuolilla on näytetty, että sin β = cos α , cos β = sin α , tg β = cot α ja cot β = tg α . Tästä käy selville, että kulman sini = sen komplementtikulman kosini ja kulman tangenti = sen komplementtikulman kotangenti.

Vertaamalla saman kulman tangentin ja

kotangentin arvoja toisiinsa huomataan, että ne ovat toistensa käänteislukuja.

Kulman siniä, kosinia, tangenttia ja kotangenttia nimitetään yhteisellä nimellä

Trigonomisiksi funktioiksi. Niistä kulman tangenttia ja siniä käytettiin jo aiemmissa esityksissä.

Kuvassa 77 a-kulman trigonometrinen funktioiden arvot ovat:

$$\sin \alpha = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\text{cot } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{3} = 1,33\dots$$

Aiemmin esitetystä $0^\circ \dots 45^\circ$ kulmien tangenttitaulukosta nähdään, että tg $36^\circ 50' = 0,749$ ja tg $37^\circ = \text{tg } 36^\circ 60' = 0,754$. Näistä saadaan välystelemällä $\alpha = 36^\circ 52'$.

Välystely:

$$10 \left[\begin{array}{l} \text{tg } 36^\circ 60' \\ x \left[\begin{array}{l} \text{tg } 36^\circ (50 + x)' \\ \text{tg } 36^\circ 50' \end{array} \right] \end{array} \right] \begin{array}{l} = 0,754 \\ = 0,750 \\ = 0,749 \end{array} \left[\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right] 1 \left[\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right] 5$$

josta $x : 10 = 1 : 5$ eli $x = \frac{10 \cdot 1}{5} = 2$

Siis $\text{tg } 36^\circ 52' = 0,75$, joten α -kulma = $36^\circ 52'$.

Loppuun liitetystä trigonometrisistä taulukoista saadaan $0^\circ \dots 90^\circ$ kulmien sinin, kosinin, tangentin ja kotangentin arvot.

Seuraavassa on esitetty kaavat, joiden avulla suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet, kulmat ja ala voidaan laskea, kun kolmion kaksi sivua tai sivu ja terävistä kulmista toinen tunnetaan. Taulukon lopussa $\sin 2 \alpha$ tarkoittaa 2-kertaisen α -kulman siniä.

Suorakulmaisten kolmioiden osien suuruuden laskeminen.		
Tunnetaan	Kysytään	Ratkaisu
a, b	α	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\alpha = 90^\circ - \beta$
	β	$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$ $\beta = 90^\circ - \alpha$
	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
	A	$A = \frac{a \cdot b}{2}$ A = kolmion ala
a, c	α	$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\alpha = 90^\circ - \beta$
	β	$\cos \beta = \frac{a}{c}$ $\beta = 90^\circ - \alpha$
	b	$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c + a) \cdot (c - a)} = c \cdot \cos \alpha = c \cdot \sin \beta$
	A	$A = \frac{a}{2} \sqrt{(c + a) \cdot (c - a)} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \cos \alpha$
a, α	b	$b = a \cdot \cot \alpha$
	c	$c = \frac{a}{\sin \alpha}$
	A	$A = \frac{a^2}{2} \cdot \cot \alpha$
b, α	a	$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$
	c	$c = \frac{b}{\cos \alpha}$
	A	$A = \frac{b^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$
c, α	a	$a = c \cdot \sin \alpha$
	b	$b = c \cdot \cos \alpha$
	A	$A = \frac{c^2}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{c^2}{4} \sin 2 \alpha$